



برای تعیین D ، در طرفین $x = 0$ قرار می‌دهیم:

$$0 = A + B + D \xrightarrow{A=0, B=-1} D = 1$$

و بالاخره برای به‌دست آوردن C ، در طرفین تساوی $x = 1$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{8} = \frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{C+D}{2} \xrightarrow{A=0, B=-1, D=1} C = 0$$

$$I = \int \left(\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{-dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{x+1} + \text{Arctg}x + C$$

بنابراین انتگرال مورد نظر برابر است با:

توضیح بیشتر: در کسر $\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$ ، اختلاف دو عامل مخرج یعنی $(x+1)^2$ و (x^2+1) در صورت وجود دارد، بنابراین تجزیه این کسر به صورت

$$\frac{f(x)-g(x)}{f(x).g(x)} \text{ می‌باشد، به طور کلی اگر کسر داده شده به صورت } \frac{f(x)-g(x)}{f(x).g(x)} \text{ باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت:}$$

$$\frac{f(x)-g(x)}{f(x).g(x)} = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}$$

مثال ۱۴۲: انتگرال $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)}$ را محاسبه کنید.

$$\sum_{k=0}^m \frac{(k-m)!}{m!} \text{Ln} |x+k| + c \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{(k-1)m!} \text{Ln} |x+k| + c \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{(k-1)!}{m!} \text{Ln} |x| + c \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \text{Ln} |x+k| + c \quad (3)$$

$$p(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \dots + \frac{A_m}{x+m} = \sum_{k=0}^m \frac{A_k}{x+k}$$

پاسخ: گزینه «۳» از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم:

برای محاسبه‌ی هر کدام از اعداد A_k باید عامل $(x+k)$ را از مخرج حذف کنیم و سپس به جای همه‌ی x ها، ریشه‌ی آن یعنی $x = -k$ را قرار دهیم:

$$A_k = (x+k)p(x) \Big|_{x=-k} = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+k-1)(x+k+1)\dots(x+m)} \Big|_{x=-k} = \frac{1}{k(k+1)\dots(2k-1)(2k+1)\dots(k+m)}$$

$$= \frac{1}{(-k)(-k+1)\dots(-1)(1)(2)\dots(m-k)} = \frac{1}{(-1)^k k!(m-k)!} = \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \frac{1}{x+k} \Rightarrow \int p(x) dx = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \int \frac{dx}{x+k} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \text{Ln} |x+k|}{k!(m-k)!} + c$$

با جایگذاری A_k داریم:

$$m=1 \Rightarrow \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \text{Ln} |x| - \text{Ln} |x+1| + c$$

روش تستی: به ازای $m=1$ مسأله را حل می‌کنیم:

تنها گزینه‌ای که به ازای $m=1$ این جواب را می‌دهد، گزینه «۳» است.

نکته ۱۴: هرگاه کسر داده شده در سؤال به صورت $\frac{1}{[f(x)+a][f(x)+b]}$ باشد (یعنی مخرج را بتوان به صورت ضرب دو چندجمله‌ای نوشت که تفاضل

آن‌ها عددی ثابت است)، در این صورت کسر مورد نظر را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\frac{1}{(f(x)+a)(f(x)+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{f(x)+a} - \frac{1}{f(x)+b} \right)$$

$$\text{مثال: } \frac{1}{(x^2+x+a)(x^2+x+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x^2+x+a} - \frac{1}{x^2+x+b} \right)$$

$$\text{مثال: } \frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)$$

مثال ۱۴۳: حاصل $I = \int \frac{dx}{x^4 + \Delta x^2 + 4}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \text{Arctg}x - \frac{1}{6} \text{Arctg} \frac{x}{2} + C \quad (4) \quad \frac{2}{3} \text{Arctg}x - \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{x}{2} + C \quad (3) \quad \frac{1}{3} \text{Arctg}x - \frac{2}{3} \text{Arctg} \frac{x}{2} + C \quad (2) \quad \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \text{Arctg}x + C \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۴» مخرج کسر را به صورت $x^4 + \Delta x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4)$ تجزیه می‌کنیم، در این صورت طبق نکته‌ی گفته شده داریم:

$$\frac{1}{x^4 + \Delta x^2 + 4} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{4-1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right)$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3} (\text{Arctg}x - \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{x}{2}) + C = \frac{1}{3} \text{Arctg}x - \frac{1}{6} \text{Arctg} \frac{x}{2} + C$$